1　大問 1 の解答

問題

a, b, p, q を定数とし、$a > 0$ とする。関数 $f(x) = x^2 + ax + 2$ について、放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を (p, q) とする。また、関数 $g(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ は $x = p$ で極値 q をとるとする。

(1) a, b, p, q の値を求めよ。

(2) 2 曲線 $y = f(x)$、$y = g(x)$ の共有点のうちで、点 (p, q) と異なる点の座標を求めよ。

解答

(1)

$f(x), g(x)$ の条件から「関数 $f(x), g(x)$ の共有点の座標の 1 つが (p, q) である」といえる。これを利用して定数の値を求める。

関数 $f(x)$ を 2 次関数の標準形にすると、

$$f(x) = x^2 + ax + 2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2 \tag{1.1}$$

頂点は (p, q) なので、ここから

$$p = -\frac{a}{2}, \quad q = -\frac{a^2}{4} + 2 \tag{1.2}$$

また、$g(x)$ が $x = p$ で極値 q をとることから、$g'(p) = 0, g(p) = q$ であるといえる。$g'(p)$ について、

$$g'(p) = 3p\ 2 + 2ap + b = 0 \qquad \therefore b = -3p^2 - 2ap \tag{1.3}$$

$g(p) = p^3 + ap^2 + bp - 2 = q$ に (1.3) で得た b と (1.2) で得たで p, q を代入すると、

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{a}{2}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left\{-3\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - 2a\left(-\frac{a}{2}\right)\right\}\left(-\frac{a}{2}\right) - 2 &= -\frac{a^2}{4} + 2 \\
-\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{4} - \frac{a}{2}\left(-\frac{3}{4}a^2 + a^2\right) + \frac{a^2}{4} - 4 &= 0 \\
-\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{8} + \frac{a^2}{4} - 4 &= 0 \\
\frac{a^2}{4} - 4 &= 0 \\
a^2 - 16 &= 0 \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

(1.4) 式を方程式とすると、解は $a = \pm 4$ となる。しかし、$a > 0$ であることから $a = 4$ が定まる。a が定まった事で p, q も定まる。

$$p = -\frac{4}{2} = -2, \quad q = -\frac{4^2}{4} + 2 = -2 \tag{1.5}$$

最後に b の値は

$$b = -3p^2 - 2ap = -3(-2)^2 - 2\dot{4}(-2) = -12 + 16 = 4 \tag{1.6}$$

以上より、a, b, p, q の値は

$$a = 4,\ b = 4,\ p = -2,\ q = -2 \tag{1.7}$$

(2)

(1) から、$f(x), g(x)$ は以下のようになる。

$$f(x) = x^2 + 4x + 2 \tag{1.8}$$

$$g(x) = x^3 + 4x^2 + 4x - 2 \tag{1.9}$$

$y = f(x)$、$y = g(x)$ の共有点では $f(x) = g(x)$ が成立するので、(1.9) 式と (1.9) 式から共有点上では次のような 3 次方程式となる。

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \tag{1.10}$$

(1) より共有点の 1 つは $(-2,-2)$ である。このことから、c,d を定数としたとき、(1.10) 式は以下のような形に変形する事が出来る。

$$x^3+3x^2-4=(x+2)(x^2+cx+d) \tag{1.11}$$

(1.11) 式を恒等式として c,d の値を求める。(1.11) 式の右辺を変形すると、

$$(x+2)(x^2+cx+d)=x^3+(c+2)x^2+(2c+d)x+2d \tag{1.12}$$

(1.12) の結果と、(1.11) 式の左辺を比較すると、

$$c=1, d=-2 \tag{1.13}$$

となる。よって、3 次方程式 (1.10) の左辺は

$$x^3+3x^2-4=(x+2)(x^2+x-2)=(x+2)^2(x-1) \tag{1.14}$$

以上から、もう一つの共有点の x 座標値は $x=1$ であることがわかる。このとき、$f(1)=g(1)=7$ である。
したがって、$(-2,-2)$ と異なる点の座標は $(1,7)$ となる。

2　大問 2 の解答

問題

　a を正の数とし、曲線 $y = a\log x$ を C とする。曲線 C 上の点 $(a, \log a)$ における接線を l とする。ただし、対数は自然対数とする。

(1) l の方程式を a を用いて表せ。
(2) l と C、および 2 直線 $x = 2$、$x = 4$ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。
(3) $S(a)$ が最小となるような a の値を求めよ。

解答

(1)
$y = f(x)$ とすると、

$$f'(x) = \frac{a}{x} \qquad \therefore \ f'(a) = 1 \tag{2.1}$$

よって、$(a, a\log a)$ における接線 l の方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = x - a + a\log a \tag{2.2}$$

(2)
本来、このような問題では a の値により場合分けにより積分値を求めるべきである。しかし、接線 l は曲線 C の常に上の位置にあるため、a がどの位置にあっても同じ積分式となる。したがって、$S(a)$ は、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_2^4 (x - a + a\log a - a\log x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - a(x\log|x| - x) + (-a + a\log a)x\right]_2^4 \\ &= (8 - 8a\log 2 + 4a\log a) - (2 - 2a\log 2 + 2a\log a) \\ &= -6a\log 2 + 2a\log a + 6 \end{aligned} \tag{2.3}$$

(3)
$S(a)$ について調べる。

$$S'(a) = -6\log 2 + 2(\log a + 1) = 2\log a - 6\log 2 + 2 \tag{2.4}$$

$S'(a) = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \log a &= 3\log 2 - 1 \\ \log a &= \log 8 - \log e \\ \log a &= \log\frac{8}{e} \end{aligned}$$

底が等しいので、真数比較により $a = \dfrac{8}{e}$ で、この時極値は $-\dfrac{16}{e} + 6 (< 0)$ である。この a は正の値であり、以下の増減表から $S(a)$ が最小値をとることから題意を満たす。

a	$\cdots$	$\frac{8}{e}$	$\cdots$
$S'(a)$	$-$	0	$+$
$S(a)$	$\searrow$	$-\frac{16}{e}+6$	$\nearrow$

したがって、$S(a)$ を最小にする a の値は、$a = \dfrac{8}{e}$ である。

3　大問 3 の解答

問題

　正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が、次の条件を満たすとする。

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{3.1}$$

(1) $b_n = \dfrac{3^n}{a_n}$ とおくとき、$b_{n-1} - b_n$ を n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答

(1)

漸化式を変形すると、

$$\begin{aligned} 3a_n - a_{n+1} &= 2^n a_n a_{n+1} \\ \frac{3a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} &= 2^n \end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.2) をもとに $b_{n+1} - b_n$ を計算すると、

$$b_{n+1} - b_n = \frac{3^{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{3^n}{a_n} = \frac{3^{n+1}a_n - 3^n a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = 3^n \cdot \frac{3a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = 3^n \cdot 2^n = 6^n \tag{3.3}$$

(2)

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるにあたり、まず数列の $\{b_n\}$ 一般項を求める。(1) より $b_{n+1} - b_n$ は階差数列となっている。よって $n \geq 2$ のとき、$b_1 = \dfrac{3^1}{a_1} = \dfrac{3}{5}$ なので、

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6^k = \frac{3}{5} + \frac{6(6^{n-1} - 1)}{6 - 1} = \frac{6^n - 3}{5} \tag{3.4}$$

この式は $n = 1$ のとき $b_1 = \dfrac{6^1 - 3}{5} = \dfrac{3}{5}$ なので、n が全ての自然数に対して成立する。したがって、

$$b_n = \frac{6^n - 3}{5} \tag{3.5}$$

これより、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = \frac{3^n}{b_n} = \frac{5 \cdot 3^n}{6^n - 3} = \frac{5 \cdot 3^n}{3^n(2^n - 3^{1-n})} = \frac{5}{2^n - 3^{1-n}} \tag{3.6}$$

4　大問 4 の解答

問題

t を正の数とする。平行四辺形 ABCD において、辺 AB を $t:1$ に内分する点を E、辺 BC を 3:1 に内分する点を F とする。また、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{d}$ とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$、$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ を $t, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{d}$ のなす角が 45° で、$|\overrightarrow{b}| = \sqrt{2}|\overrightarrow{d}|$ であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \perp \overrightarrow{\mathrm{EF}}$ となるような t の値を求めよ。

解答

(1)

E は辺 AB を $t:1$ に内分する点、F は辺 BC を 3:1 に内分する点である。また、平行四辺形の性質から、$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{d}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AE}} &= \frac{t}{t+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{t}{t+1}\overrightarrow{b} & (4.1)\\
\overrightarrow{\mathrm{DE}} &= \overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{t}{t+1}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{d} & (4.2)\\
\overrightarrow{\mathrm{EF}} &= \overrightarrow{\mathrm{EB}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} = \frac{1}{t+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{1}{t+1}\overrightarrow{b} + \frac{3}{4}\overrightarrow{d} & (4.3)
\end{aligned}$$

(2)

$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{d}$ のなす角が 45° なので、$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{d}$ の内積は

$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} = |\overrightarrow{b}||\overrightarrow{d}|\cos 45^\circ = \sqrt{2}|\overrightarrow{d}|^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = |\overrightarrow{d}|^2 \tag{4.4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \perp \overrightarrow{\mathrm{EF}}$ なので、$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EF}} = 0$ が成り立つ。ここから t についての方程式を導く。左辺を展開すると、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EF}} &= \left(\frac{t}{t+1}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{d}\right)\left(\frac{1}{t+1}\overrightarrow{b} + \frac{3}{4}\overrightarrow{d}\right)\\
&= \frac{t}{(t+1)^2}|\overrightarrow{b}|^2 + \frac{3t-4}{4(t+1)}\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} - \frac{3}{4}|\overrightarrow{d}|^2\\
&= \left\{\frac{2t}{(t+1)^2} + \frac{3t-4}{4(t+1)} - \frac{3}{4}\right\}|\overrightarrow{d}|^2 & (4.5)
\end{aligned}$$

これより、求める t についての条件は、

$$\begin{aligned}
\frac{2t}{(t+1)^2} + \frac{3t-4}{4(t+1)} - \frac{3}{4} &= 0\\
8t + (3t-4)(t+1) - 3(t+1)^2 &= 0\\
8t + (3t^2 - t - 4) - 3(t^2 + 2t + 1) &= 0\\
t - 7 &= 0\\
t &= 7 & (4.6)
\end{aligned}$$

この t は正の数であり、題意を満たす。したがって、求める t の値は $t = 7$ である。

5　大問 5 の解答

問題

行列

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

について、$PX = A + X^{-1}AX$ が成り立つとする。ただし、a, p, q, r, s は実数とする。

(1) p, q, r, s をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) $(A+P)(A-P) = A^2 - P^2$ が成り立つような a の値を求めよ。

解答

(1)

X は、2 次平方行列が逆行列を持つ条件から $1 \times (-2) - 1 \times (-1) = -1 \neq 0$ であるので逆行列が存在する。逆行列 X^{-1} を求めると、

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

X は逆行列を持つので、$XX^{-1} = X^{-1}X = E$(E は単位行列) が成立する。よって、条件式に右から X^{-1} を掛けて変形し成分ごとに計算すると

$$\begin{aligned} P &= AX^{-1} + X^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 2a+1 & a+1 \\ -a+4 & -a+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a+1 & a-4 \\ -a-1 & -a+3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(2a+1) & 2a-3 \\ -2a+3 & 2(-a+3) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.3}$$

よって、

$$p = 2(2a+1), \quad q = 2a-3, \quad r = -2a+3, \quad s = 2(-a+3) \tag{5.4}$$

(2)

(左辺) $= (A+P)(A-P) = A^2 - AP + PA - P^2$ である。この式が右辺と等しくなるには、O を零行列とおくと以下の条件を満たせばよいことになる。

$$-AP + PA = O \tag{5.5}$$

(5.5) 式から a の値を求める。(5.5) 式の左辺を計算すると、

$$\begin{aligned} -AP + PA &= -\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2(2a+1) & 2a-3 \\ -2a+3 & 2(-a+3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(2a+1) & 2a-3 \\ -2a+3 & 2(-a+3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -10a+10 \\ -10a+10 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.6}$$

よって、ここから求める a についての条件は

$$-10a + 10 = 0 \qquad \therefore\ a = 1 \tag{5.7}$$